

2. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков. Информационные технологии в образовании и науке - ИТОН 2016: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: КФУ, 2016. – С. 172–179.
3. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф., Екатеринбург: Рос. гос. проф.-пед. ун-т, 2017. – С. 413–417.
4. Рожков А.В. О подгруппах некоторых групп Алёшинского типа / А.В. Рожков // Алгебра и логика. – 1986. – Т. 25. – № 6. – С. 643–671.
5. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / К. Чандрасекхаран. – М.: Мир, 1974. – 178 с.

SPECIFICATION OF THE THEOREM OF MERTENS OF MEAN VALUE OF FUNCTION EULER

A.V. Rozhkov

The extensive calculations specifying the known theorem of Mertens of mean value of function Euler are carried out. New unexpected results are received.

Keywords: computer algebra, operating systems, programming languages, number theory.

УДК 519.688, 511.174

СУММА ЦИФР ФАКТОРИАЛА

А.В. Рожков¹, Н.В. Потапова²

¹ ros.seminar@bk.ru; Кубанский государственный университет

² potapova50@gmail.com; Кубанский государственный университет

Выдвинута гипотеза, аналогичная формуле Стирлинга, но только не для факториала, а для его суммы цифр. Гипотеза проверена для всех чисел меньших миллиона

Ключевые слова: компьютерная алгебра, операционные системы, языки программирования, теория чисел.

DPS-стратегии — Debian - Python - Sage — операционная система на открытом коде, язык программирования, доступный для всех, пакет компьютерной алгебры на открытом коде. Эту стратегию развивают, на уровне отдельных дисциплин, многие университеты из первой сотни, иногда, правда, заменяя Python на Julia — новый (2012 г.) язык программирования, ориентированный на распределенные математические вычисления. В РФ связку Debian - Python - Sage активно использует кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова.

Данная работа является прямым продолжением и развитием работ [1], [2], [3].

1. Сферы применения DPS платформы

Первоначально [1] все задумывалось с достаточно прозаической целью — как источник для написания "Курсовых работ, дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций".

По мере реализации проекта стало ясно, что технология может использоваться для создания "Startup, разработки комплексов программ как в области научного так и прикладного программирования".

Какие проекты научного и учебного направления можно реализовывать в рамках данной программной платформы?

На момент написания статьи (сентябрь 2017 г.) в Кубанском государственном университете заявлено более 200 тем, связанных с компьютерной алгеброй, теорией чисел, абстрактной алгеброй и компьютерной безопасностью.

Вот некоторые из числа предложенных задач.

1. Численные эксперименты для нахождения подходов к решению проблемы Коллатца (1937 г.) Например, проверки того, что длина цепочки, начинающейся с нечетного числа n , если отбросить четные члены, не превышает $\log_{4/3} n$.

2. Численные эксперименты с распределением простых чисел на прямой. *Плотная n -ка* - это n простых чисел, расположенных на отрезке минимально возможной длины. Рожков А.В. ввел плотные n -ки в 2012 г. Оказалось, что в 1999 г. под названием k -tuplet их ввел Т.Форбес. Поиском плотных n -к сейчас занимаются сотни людей в разных странах мира, часто с использованием суперкомпьютеров. В 2016 г. найдены первые плотные n -ки для $n = 21$. Если будут найдены плотные n -ки для $n = 447$, то будет опровергнута знаменитая гипотеза Hardy-Littlewood о распределении простых чисел. То есть будет доказано, что где-то там, очень далеко от начала координат, существует математическая страна El Dorado, где простые числа встречаются чаще, чем в начале координат!

3. Вычисления в области алгебры с условиями конечности. Например, вычисления характеристик Бернсайдовых групп, где есть много нерешенных проблем [4] и др.

Визуализация

В процессе вычислений было получено много промежуточных данных и потребовалась программа для работы с графиками. Была выбрана бесплатная программа SciDAVis — официальный сайт <http://scidavis.sourceforge.net>. SciDAVis — система анализа, обработки, визуализации экспериментальных данных и аппроксимации кривых. Поддерживает значительное количество аппроксимирующих функций, скрипты, базовые статистики с графиками и визуализацией и многое другое. Один из наиболее полнофункциональных и удобных аналогов коммерческого OriginPro. SciDAVis предназначена для построения 2D и 3D-графиков различных типов: линейных, точечных, трёхмерных гистограмм, объёмных круговых гистограмм, трёхмерных поверхностей. Исходные данные могут быть импортированы из ASCII-файлов, введены вручную или вычислены по формулам.

2. Сумма цифр факториала натурального числа

Пусть n — натуральное число, а $S(n)$ — сумма цифр его десятичной записи. Весьма загадочна связь суммы цифр произведения с суммой цифр сомножителей. Тут нет надежды даже на монотонность в духе евклидовой нормы. В самом деле,

$$S(2^{10}) = S(1024) = 7, S(5^{10}) = S(8765625) = 40, S(2^{10} \cdot 5^{10}) = 1.$$

Тем не менее, даже в этом сюрреалистичном хаосе есть свой «железный» порядок. На его нахождение нас вдохновила формула Стирлинга, связывающая факториал натуральных чисел с трансцендентными числами:

$$n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Численный эксперимент позволил нам выдвинуть гипотезу, что $|F(n)| < 1$, для любого $n > 100$, где

$$F(n) = \frac{S(n!)}{n} - 2 \ln \frac{n}{2} + 2.$$

Вычисления проводились до $n = 10^6$. Миллион факториал содержит примерно 5 млн. десятичных знаков, удивительно, что современные домашние компьютеры способны работать с такими числами.

На отрезке $[100; 10^6]$:

1. Выполняется неравенство $|F(n)| < 1$.
2. Математическое ожидание функции $F(n)$ быстро стремится к 0, при $n > 10^4$ оно не превышает по модулю 10^{-5} , а при $n > 10^5$ модуль математического ожидания не превышает 10^{-6} .
3. Дисперсия функции $F(n)$ при $n > 10^5$ не превышает 0,001.
4. Плотность распределения значений функции $F(n)$ приведена на Рис. 1, на нем же указано нормальное распределение при тех же математическом ожидании и дисперсии.

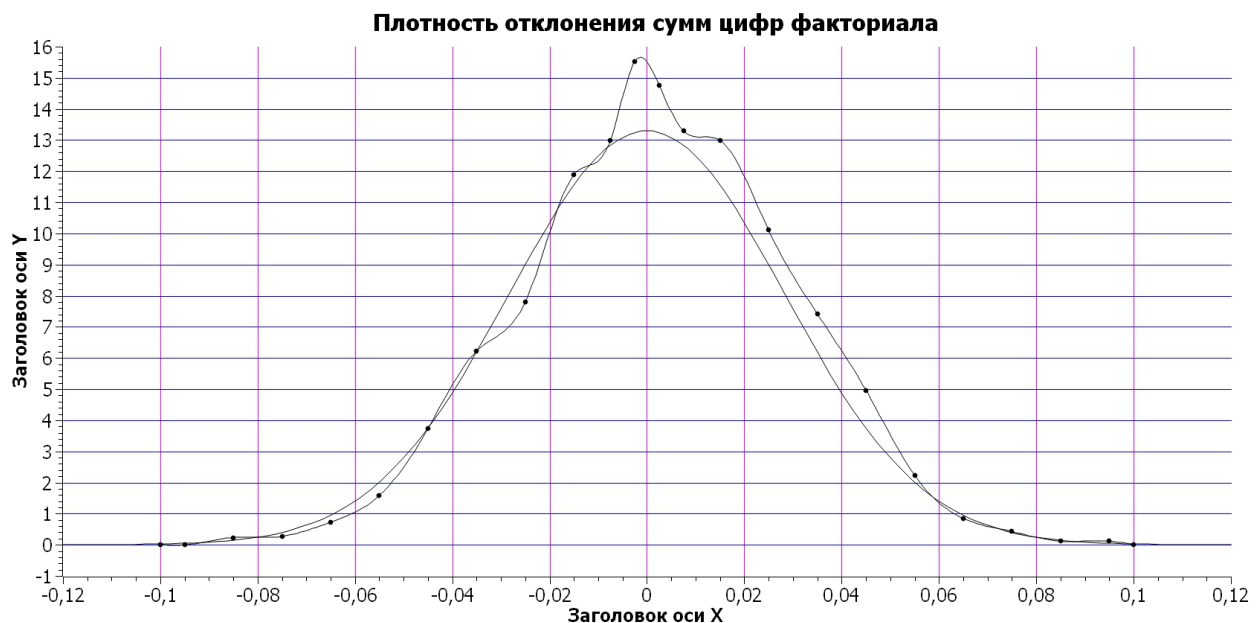


Рис. 1. Плотность распределение вероятностей суммы цифр факториала

Поражает симметричность функции плотности распределения и тот факт, что 99% значений функции $F(n)$ принадлежат интервалу $(-0,1; 0,1)$.

Вычисления позволили нам выдвинуть гипотезу, что с ошибкой, меньшей n

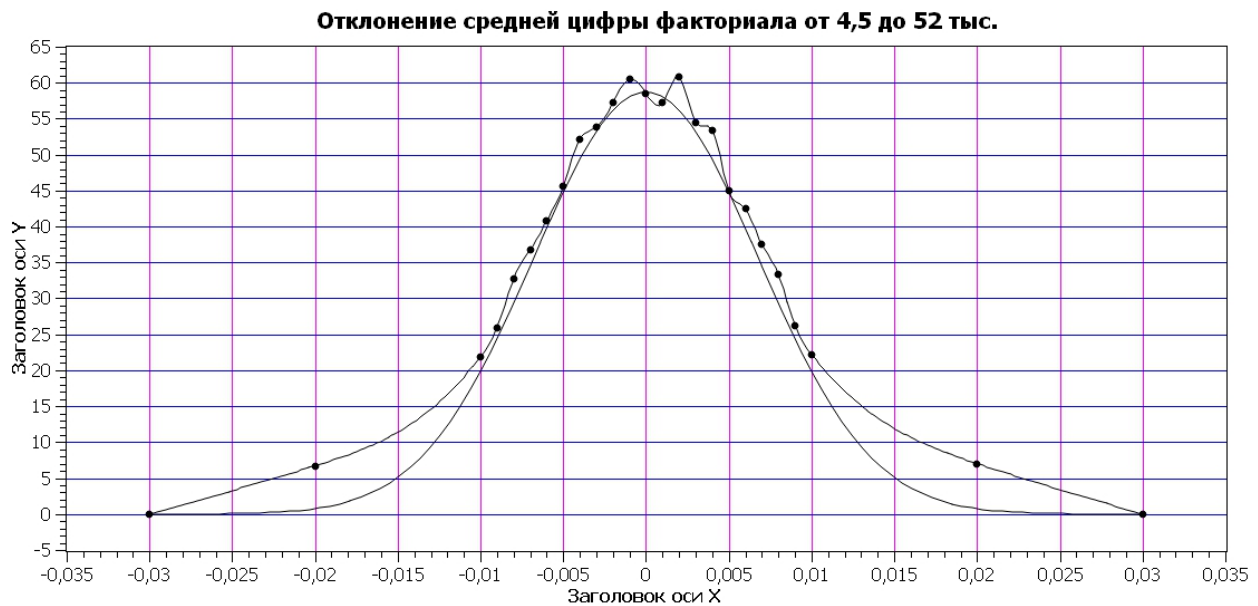


Рис. 2. Плотность распределения средней цифры факториала.

$$S(n!) \approx 2n \ln \frac{n}{2} - 2n.$$

Важной характеристикой натурального числа является среднее значение цифры в его десятичной записи. Взятое наугад натуральное число, естественно, имеет среднее значение цифры в своей записи равное 4,5.

Каково среднее значение цифры числа $n!$, если отбросить последние нули?

Отбрасывание последних нулей весьма важно, потому, что у числа $n!$ таких нулей примерно $\frac{n}{4} = n\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$ — мы вычислили на какую степень числа 5 делится $n!$. И эти нули не случайность, а железобетонная необходимость, их не может не быть.

На отрезке $[100; 10^6]$:

1. Матожидание средней цифры числа $n!$ стремиться к 4,5. При $n > 1000$ отличается от 4,5 меньше, чем на 0,001, а при $n > 10^5$ меньше, чем на 10^{-6} .

2. Дисперсия средней цифры при $n > 2 \cdot 10^4$ не превышает 0,00007.

3. График плотности распределения значений средней цифры числа $n!$ приведен на Рис. 2, на нем же указано нормальное распределение при тех же матожидании и дисперсии.

Таким образом, факториал ведет себя, как представитель всего народа натуральных чисел, его средняя цифра равна 4,5.

Если мы прологорифмируем формулу Стрилинга, то получим $n \ln(n) - n$. Очень похоже на нашу гипотезу, только нет коэффициента 2.

3. Некоторые обобщения

Сумма цифр числа зависит от системы счисления. Нами были проведены вычисления для k -значных систем, $k \in \{2, 10, 17, 197\}$.

По результатам вычислений была выдвинута гипотеза, что для любой k -значной системы существуют такие действительные положительные числа A, B, C

и такое натуральное число N , что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{S(n!)}{n} - A \ln(n) + B \right| < C.$$

Для перечисленных выше значений k вычисления позволили выдвинуть гипотезу, что

$$A = \frac{k}{2 \ln(k)}, B = \sqrt{k}, C = \ln(k), N = 4 * 10^4.$$

Литература

1. Рожков А.В., Рожкова М.В. Преподавание математики и информатики в ведущих университетах мира и опыт КубГУ / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи: материалы I Всероссийской научно-практической конференции. – Майкоп, 2015. – С. 116–121.
2. Рожков А.В. Стратегия DPS - Debian-Python-Sage: Проблемно-ориентированные вычислительные среды на открытом коде / А.В. Рожков. Информационные технологии в образовании и науке - ИТОН 2016: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: КФУ, 2016. – С. 172–179.
3. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / А.В. Рожков, М.В. Рожкова // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф., Екатеринбург: Рос. гос. проф.-пед. ун-т, 2017. – С. 413–417.
4. Рожков А.В. О подгруппах некоторых групп Алёшинского типа / А.В. Рожков // Алгебра и логика. – 1986. – Т. 25. – № 6. – С. 643–671.

SUM OF DIGITS OF THE FACTORIAL

A.V. Rozhkov, N.V. Potapova

The hypothesis similar to the Stirling formula, but only not for the factorial, and for its sum of digits is made. The hypothesis is checked for all numbers smaller one million.

Keywords: computer algebra, operating systems, programming languages, number theory.

УДК 002.6: [372.8:51]

РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНОГО ПРОЕКТА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПУТЕВОДИТЕЛЬ КАЗАНИ»

Е.Р. Садыкова¹, З.Т. Галимханова², А.Н. Гузялова³

¹ —; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

² —; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

³ —; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье освещаются вопросы, связанные с разработкой интерактивного проекта средствами среды яндекс-карты, показано его применение в практике учителя математики.